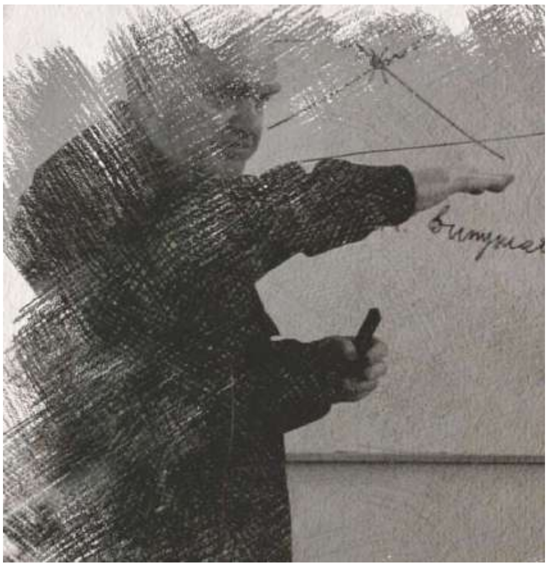
Альма-Матер

Поздняков Сергей Николаевич

ПОВЕСТЬ ПЕРВАЯ. СТУДЕНТЫ, ТРОПИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИКА И НЕЙРОННЫЕ СЕТИ

Часть первая. Приглашение в тропики

История началась с приезда известного ученого, который в Википедии именуется Димой Григорьевым, но к которому мы все же решили обращаться не на европейский, а на российский лад – Дмитрий Юрьевич. Дмитрий Юрьевич приехал в Санкт-Петербург по приглашению Николая Николаевича Васильева, старшего научного сотрудника математического института Российской академии наук и заведующего лабораторией алгоритмической математики СПбГЭТУ «ЛЭТИ», и одну за другой прочитал на организованном Васильевым семинаре по алгоритмической математике серию лекций со странными ключевыми словами “тропическая математика”.



Дмитрий Юрьевич Григорьев, известный в мире ученый, работающий на границе математики и компьютерных наук, специалист в области эффективных вычислений

Когда на стендах появилось объявление о лекции по тропической математике, у студентов и преподавателей оно вызвало шквал шуток о том, как, наверное, хорошо заниматься математикой в тропиках, совмещая умственную работу с физическими удовольствиями. Как ни странно, оказалось, что они недалеки от истины, и название было дано в честь бразильского математика Имре Шимона, который внес существенный вклад в развитие этой области.

После окончания цикла лекций Дима Григорьев для интервью корреспонденту отдела общественных связей СПбГЭТУ «ЛЭТИ», опубликованное на сайте университета (https://clck.ru/Lj4BX,). В нем конечно было немного математики, но смысл понятия “тропическая математика” несколько прояснился.

Вот что сказал в своем интервью автор более 170 научных работ по математике и информатике, Дмитрий Юрьевич Григорьев, окончивший в 1976 году Ленинградский государственный университет, и в настоящее время являющийся главным научным сотрудником Национального центра научных исследований Франции (Centre National de la Recherche Scientifique, CNRS).

– Дмитрий Юрьевич, расскажите, пожалуйста, чем отличается тропическая математика от той, которую все учат в школе?

– В классической математике есть задачи, в которых найти полное решение – большая удача. Сегодня, в связи с развитием компьютеров, появилось возможность рассматривать трудные вычислительные задачи, которые не удается решить полностью. Тогда на помощь ученым приходит тропическая математика, которая в сложных системах позволяет найти главный член асимптотики и предложить упрощенную модель для поиска решения.

При помощи тропической математики можно упрощенными методами решать задачи из классической математики. В современной алгебраической геометрии есть ряд задач, которые решены путем замены алгебраических уравнений на тропическую модель.

С точки зрения теории это очень красивая область. Она заменяет обычную арифметику с действиями сложения и умножения на совершенно другую арифметику и геометрию, в которой сложение заменяется на минимум, а умножение – на сложение. Кроме того, с точки зрения методики преподавания тропическая математика проще, чем классическая. Поэтому я считаю, что студентам первого курса лучше сначала изучить именно ее, так как она проще для понимания алгоритмов.

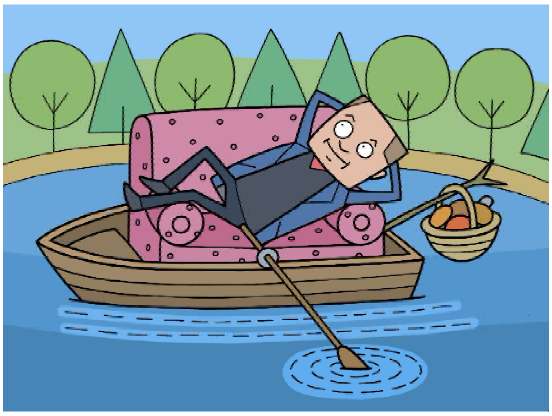
Тропическая математика берет свое начало еще со времен Исаака Ньютона. Ее подъем пришелся на 90-е годы XX века. Насчет столь необычного названия существует легенда о том, как два математика, отдыхая на пляже в Бразилии, обсуждали название нового направления. Один из них предложил: «Так как мы находимся здесь, где солнце и пальмы, то пусть она будет тропической». Так название и появилось».

– Чем тропическая математика может быть полезна для современной жизни?

– У тропической математики много применений: нейронные сети, предсказание погоды и ситуации на финансовых рынках, расчет вероятности выигрыша в играх, описание метаболизма человека. В Нидерландах тропическая математика используется для составления расписания движения поездов – для этого достаточно ввести исходные данные и ограничения. Банк Англии предложил использовать тропическую кривую для составления начальной цены на аукционах. Это лишь малая часть областей применения тропической математики. На самом деле, ее возможности безграничны. Поэтому всем, кто планирует заниматься современными технологиями, нужно обязательно изучить ее.

– Дмитрий Юрьевич, откуда Вы черпаете вдохновение для новых открытий?

– Озарение приходит по-разному. Я обычно чувствую, когда идея приходит и картинка складывается. Над некоторыми проблемами можно думать целый год, а статью написать за один-два дня. Идеи никогда не приходят в голову, когда сосредоточенно сидишь за столом. В таких случаях часто начинаешь осознавать, что ничего не понятно, все разваливается. Иногда лучше пойти в лес за грибами, покататься на лодке или просто полежать на диване и посмотреть в потолок.



«Идеи никогда не приходят в голову, когда сосредоточенно сидишь за столом. Иногда лучше пойти в лес за грибами, покататься на лодке или просто полежать на диване и посмотреть в потолок».

Николай Николаевич Васильев, руководитель семинара по алгоритмической математике, сотрудник института математики РАН

В своем интервью Дмитрий Юрьевич сообщил удивительную вещь, которая не вошла в опубликованное на сайте университета интервью.

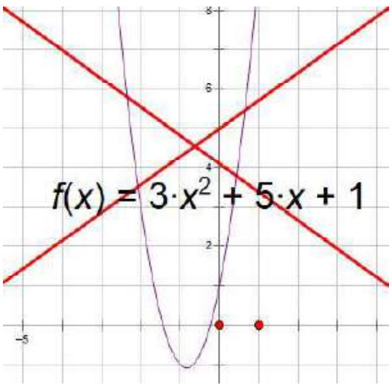
Он поведал, что обладает внутренним математическим видением аналогии между обычными многочленами и тропическими многочленами, и вообще, между алгоритмами обычной математики и алгоритмами тропической математики. Эта интуиция позволяет ему предсказывать, а потом и доказывать новые теоремы в тропической математике.

– Так чем же тропическая математика отличается от «обычной»?

Внешне тропическая математика отличается от обычной математики (видимо, математики “средних широт”) тем, что операция умножения заменяется операцией сложения, а операция сложения взятием максимума (или минимума). Например, если в тропической математике записан многочлен $3x^2 + 5x + 1$, то в обычной математике он имеет такой смысл $\max\{3 + 2x;\ 5 + x;\ 1\}$, а график такой функции – совсем не парабола, а кусочно-линейная функция (рис. 1).

В конце лекции руководитель семинара Николай Николаевич Васильев, пояснил что существует и другое – труднопроизносимое – название для математик с такими необычными свойствами – “идемпотентные математики”. Термин этот весьма любопытен, так как обозначает необычное для обычной математики свойство “$a + a = a$”. Например на вопрос: “Сколько будет два плюс два?” “тропический математик” ответит “два”. Ответ “четыре” будет неправильным, так как сложение заменяется взятием максимума: $\max\{2;\ 2\} = 2$.

В этом месте лекции у студентов-второкурсников появились смутные воспоминания о курсе логике и о правилах оперирования конъюнкцией и дизъюнкцией (или проще, связками И и ИЛИ), которые они вообще-то изучали ещё в школе и даже ЕГЭ по ним сдавали, но как-то раньше не обращали



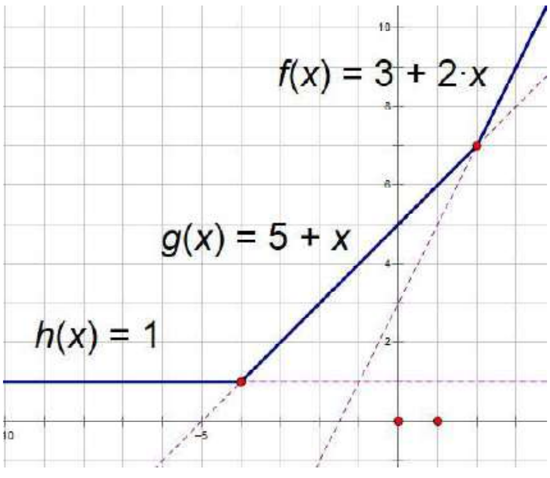
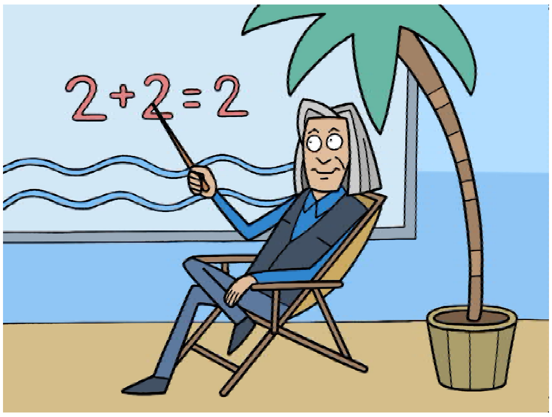


Рис. 1. Как выглядит график тропической параболы

внимания, что $A + A$ (A ИЛИ A) дает всегда A, и $A \cdot A$ (A И A) также будет равно A. Правда они тут же сообразили, что тропическая математика “не совсем идемпотентная” ведь умножение в ней – это обычное сложение, поэтому дважды два будет, как и ожидается, четыре, правда трижды три будет шесть, но к этому со временем наверное можно привыкнуть.

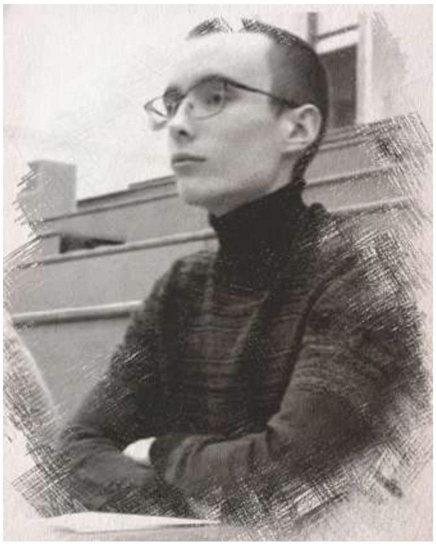


...на вопрос: «Сколько будет два плюс два?» «тропический математик» ответит «два»...

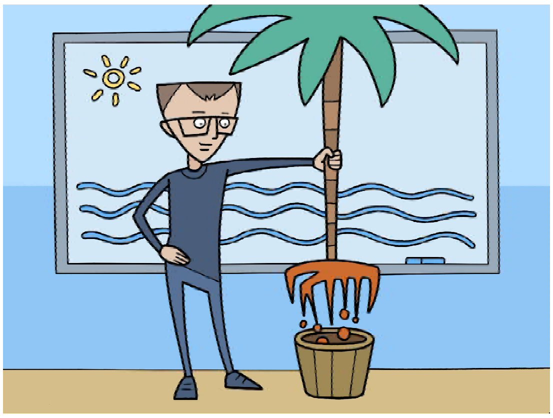
Как понять непонятное. Дмитрий находит связку “школьных” определений с новыми понятиями

Дмитрий Зайков – тогда студент 2 курса – был регулярным участником семинара по алгоритмической математике. Внимание Дмитрия привлекло странное определение корней тропического многочлена. Определение при первом прослушивании оказалось непонятным, но лектор пояснил его на графике: корни тропического многочлена – это абсциссы точек излома графика функции. То есть у тропического многочлена $3x^2 + 5x + 1$ это не выражения с радикалами $(-5 \pm \sqrt{13})/6$, а целые значения –4 и 2. Какая же это аналогия подумал Дмитрий? В первом случае мы ищем числа, где многочлен обращается в ноль, во втором случае ноль вообще не упоминается! Почему Григорьев считает для себя естественным такое определение корня многочлена? Может он просто привык или видит то, чего я не вижу?

В конце лекции он задал этот вопрос. Лектор сказал, что да, все слушатели, впервые встречающиеся с этим определением, испытывают когнитивный диссонанс, но потом привыкают. И повторил определение: *корни – это те точки (числа), в которых тропический многочлен принимает одно и то же значение дважды*. Дмитрию от этого легче не стало. Он стал придумывать способ, как объяснить себе это сходство “на пальцах”, то есть свести к тому, в чем настолько уверен, что используешь, не задумываясь. Некоторое время он был погружен в размышления, пропустил какие-то новые рассуждения лектора, подумав при этом, что ничего страшного, посмотрит потом видеозапись. И тут вдруг ему в голову пришло простое соображение, которое примирило его с новым определением, и мучительное ощущение противоречия пропало. Вспомнил что кроме *корня многочлена* часто используется понятие *корня уравнения*, обычно как-то даже не обращаешь внимание на то, что отличает одно от другого. Но сейчас это показалось важным. Нашлась связка, которой не хватало: уравнение может представлять собой равенство двух многочленов. Например корень обычного многочлена $3x^2 + 5x + 1$ можно искать как корень уравнения $3x^2 = -5x - 1$. В этом случае корень – это точка, в которой значение принимается дважды: один раз левой частью, второй – правой. Тогда и корнями тропическо-



Дмитрий, студент 2 курса, который первым из студентов разобрался с основными идеями тропической математики



Внимание Дмитрия привлекло странное определение корней тропического многочлена...

го многочлена можно считать те точки, в которых значения принимаются дважды, один раз одной линейной функцией, являющейся частью тропического многочлена, второй раз – другой. На рис. 2 видно, что это две точки: $x = -4$ и $x = 2$. Для первой точки $h(-4) = 1$ и $g(-4) = 5 - 4 = 1$, для второй точки $g(2) = 5 + 2 = 7$ и $f(2) = 3 + 2 \cdot 2 = 7$.

Так и началось знакомство Дмитрия с тропической математикой. А дальше он разобрался с книгой М. Э. Казаряна “Тропическая геометрия”, отредактировал видеозаписи докладов Димы Григорьева на страницах семинара (https://www.youtube.com/playlist?list=PLwL0ZEQK13GPftkcHrV-mE1LdBRlpmVJv), добавив к ним субтитры, сделал конспекты лекций для будущих поколений студентов и включился в работу студенческого семинара по нейронным сетям и тропической математике.

Но это уже другая история.

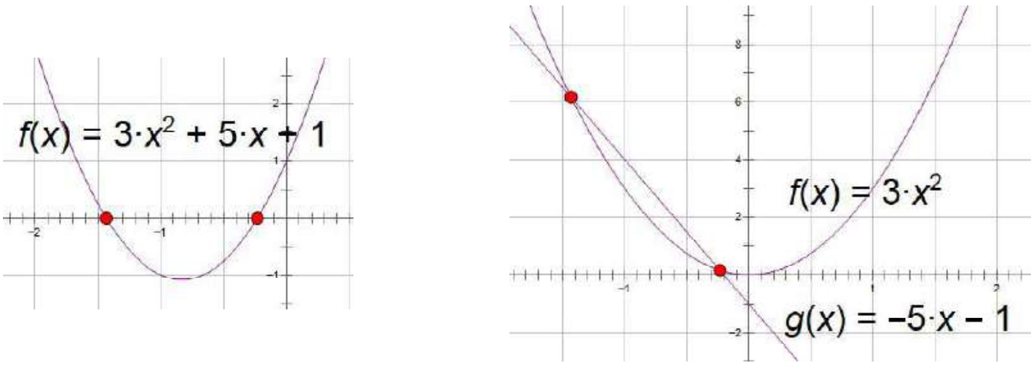


Рис. 2. Как поменять взгляд на корни многочлена

Поздняков Сергей Николаевич,
доктор педагогических наук,
заведующий кафедрой
алгоритмической математики
СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
им. В.И. Ульянова (Ленина).